Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2020, 13(3),995-1003
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2020, 13(3), 995-1003
DOI: 10.18185/erzifbed.694163
Research Article

$\boldsymbol{k}$. Mertebeden Periyodik Katsayılı $\boldsymbol{x(n+k)=A(n)x(n)}$ Lineer Fark Denklem Sisteminin Schur Kararlılığının Hassasiyeti

Gülnur ÇELİK KIZILKAN[1], Ahmet DUMAN[1*]

[1] Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Konya, Türkiye

Geliş / Received: 25/02/2020, Kabul / Accepted: 15/09/2020

Öz

Bu çalışmada, Schur kararlı k. mertebeden $x(n+k)=A(n)x(n)$ periyodik katsayılı fark denklem sisteminin hangi bozunumlar altında Schur kararlı kaldığını belirleyen süreklilik teoremleri ve sistemin ω^*–Schur kararlılığı üzerine yeni sonuçlar verildi. Elde edilen sonuçlar nümerik örnekler ile desteklendi ve literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Schur kararlılık, fark denklemleri, periyodik katsayılar, hassasiyet, bozunum sistemleri.

Sensitivity of Schur Stability of $\boldsymbol{k}$−th Order Linear Difference Equation System with Periodic Coefficients $\boldsymbol{x(n+k)=A(n)x(n)}$

Abstract

In this study, we have given the continuity theorems that determine under which perturbations k - th order Schur stable difference equation systems with periodic coefficients $x(n+k)=A(n)x(n)$ remain Schur stable and the new results on ω^*– Schur stability of the system. We supported the results with numerical examples and compared them with the results in the literature.

Keywords: Schur stability, difference equations, periodic coefficients, sensitivity, perturbation systems.

1. Giriş

Bir problemin çözümünün davranışını tahmin etmek ve problemin giriş elemanlarında oluşan değişimin problemin yapısını değiştirip değiştirmediğini bilmek uygulama alanlarında önemli avantajlar sağlar.

Verilen problemin girdilerindeki değişimin sonuca olan etkisinin belirlenmesi hassasiyet problemi olarak adlandırılır. Hassasiyetin bilinmesi, girdilerde çözümün davranışını değiştirmeyecek değişiklikler yapmaya imkân verir. Böylece problemin uygulama alanına göre; para, zaman, iş gücü ya da can kayıpları ile karşılaşılması önlenmiş olur.

Problemin hassasiyeti genellikle literatürde süreklilik teoremi olarak bilinen teoremler ile verilmektedir (Aydın vd. (2001), Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016)).

Şimdi hassasiyetini inceleyeceğimiz k. mertebeden periyodik katsayılı lineer sistemini tanıtalım.

$A(n)=A(n+T)$, N boyutlu periyodik karesel matris ve $x(n)$, N boyutlu vektör olmak üzere k. mertebeden

$x(n+k) = A(n)x(n),$

$x(s) = x_s \; (s = 0,1,2,\dots,k-1)$
(1)

problemini ele alalım. $k = 1$ olması durumun-da $k.$ mertebeden (1) sistemi, 1. mertebeden

$x(n+1) = A(n)x(n), \; x(0) = x_0$ (2)

sistemine dönüşür.

$\omega_1(A,T)$ şart sayısına bağlı (2) Cauchy probleminin Schur kararlılığının hassasiyetini veren süreklilik teoremleri Aydın vd. (2001); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016) çalışmalarında verilmiştir.

Bu çalışmada, Aydın vd. (2001); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016) da verilen süreklilik teoremleri dikkate alınarak (1) Cauchy probleminin Schur kararlılığının hassasiyetinin incelenmesi hedeflenmiştir. Bu hedef için (1) Cauchy probleminin Schur kararlılığının kalitesini belirleyen $\overline{\omega}_1(A,T)$ parametresi tanımlanmıştır. Ayrıca, yeni $\overline{\omega}_1(A,T)$ şart sayısı kullanılarak, (2) Cauchy problemi için Aydın vd. (2001); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016) da bulunan sonuçlar (1) sistemi için yeniden ifade edilmiştir.

2. Önbilgiler

Birinci mertebeden lineer periyodik katsayılı (2) fark denklem sistemini ele alalım.

$X(n+1) = A(n)X(n), X(0) = I, n = 0,1,2,\dots$

Cauchy probleminin çözümü olan $X(n)$ matrisine (2) sisteminin fundamental matrisi ve

$$X(T) = \prod_{j=0}^{T-1} A(j) = A(T-1)A(T-2)\dots A(1)A(0)$$

şeklinde tanımlanan $X(T)$ matrisine de (2) sisteminin monodromi matrisi denir (Akın ve Bulgak (1998); Aydın vd. (2000); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016)).

(2) sisteminin çözümü; $n = qT + m$, $0 \le m < T$ ve $q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$x(qT+m) = X(m)X(T)^q x_0$ şeklinde ifade edilir (Aydın vd. (2000)).

$\sigma(X(T))$, $X(T)$ matrisinin spektrumumu ve $\mathbb{C}_S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ olmak üzere; eğer $\sigma(X(T)) \subset \mathbb{C}_S$ ise $X(T)$ matrisine Schur kararlı matris denir. $X(T)$ monodromi matrisinin Schur kararlı olması, periyodik katsayılı (2) lineer fark denklem sisteminin Schur kararlı olması anlamına gelir (Akın ve Bulgak (1998); Aydın vd. (2000); Aydın vd. (2001); Bulgak (1999); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016)).

Literatürde, simetrik olmayan matrislerin özdeğer problemi kötü konulmuş bir problem olarak bilinir (Bulgak (1999), Wilkinson (1965)). Bu nedenle (2) sisteminin Schur kararlılığını özdeğerlerin hesabına ihtiyaç duymadan inceleyen yöntemler önem kazanır. Aşağıda verilen Lyapunov teoremi, lineer cebirsel bir matris denkleminin çözümü ile (2) sisteminin Schur kararlılığını belirler.

Lyapunov Teoremi: (2) sisteminin aşikar çözümünün (veya $X(T)$ monodromi matrisinin) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $X^*(T)FX(T) - F + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin $F = F^* > 0$ çözümünün var olmasıdır (Akın ve Bulgak (1998); Aydın vd. (2000); Aydın vd. (2001); Bulgak (1999); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016)).

Aydın vd. (2000) de, I birim matris; A^*, A matrisinin adjoint matrisi; $\|A\| =$

$max_{\|x\|=1}\|Ax\|$, A matrisinin spektral normu ve $\|x\|$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ vektörünün Öklid normu olmak üzere; (2) sisteminin aşikar çözümünün Schur kararlılığının kalitesini gösteren $\omega_1(A,T)$ parametresi;

$\omega_1(A,T) = \|F\|$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada,

$F = \sum_{k=0}^{\infty}(X^*(T))^k(X(T))^k$ matrisi

$X^*(T)FX(T) - F + I = 0$, $F = F^* > 0$

denklem sisteminin çözümüdür. Eğer $\omega_1(A,T)$ parametresi hesaplanabiliyor ise (2) sistemi Schur kararlıdır. Aksi takdirde sistem Schur kararlı değildir ve $\omega_1(A,T) = \infty$ şeklinde gösterilir.

$\omega^* > 1$ pratik Schur kararlılık parametresi olmak üzere $\omega_1(A,T) \le \omega^*$ eşitsizliği sağlanıyorsa (2) sistemine pratik Schur kararlı ya da kısaca $\omega^* -$ Schur kararlı sistem denir. Aksi takdirde ω^*-Schur kararsız matris denir (Aydın vd. (2000); Aydın vd. (2001); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016)).

3. Ana Sonuçlar

3.1. Semboller

Bu çalışmada kullanılan semboller aşağıda tanıtılmıştır.

- $\beta_s = max_{1\le i\le T}\|Q_s(T,i)\|(1 + (T-1)max_{1\le i\le T-1}\|Q_s(i,0)\|)$
- $\gamma_s = (T-1)max_{1\le i\le T}\|Q_s(T,i)\|$
- $\mu_s = max_{1\le i\le T}\|Q_s(T,i)\| \times \begin{cases} max_{0\le i\le T-2}\|A(ik+s)\|; & max_{0\le i\le T-2}\|A(ik+s)\| \le 1 \\ (max_{0\le i\le T-2}\|A(ik+s)\|)^{T-2}; & max_{0\le i\le T-2}\|A(ik+s)\| > 1 \end{cases}$
- $Q_s(p,r) = \prod_{i=r}^{p-1} A(ik+s)$
- $\Psi_s(p,r) = \prod_{i=r}^{p-1} B(ik+s)$
- $\Delta^s = Y_s(T) - X_s(T) = \sum_{i=0}^{T-1}\left(\prod_{j=i+1}^{T-1} A(jk+s)\right) B(ik+s)Y_s(i)$
- $\Delta_1^s = \sqrt{||X_s(T)||^2 + \frac{1}{\overline{\omega}_1(A,T)}} - ||X_s(T)||$
- $\Delta_2^s = max_{0\le i\le T-1}\|B(ik+s)\|\left(\beta_s + \gamma_s max_{1\le i\le T-1}\|\Psi_s(i,0)\| + \mu_s \sum_{r=2}^{T-1}\left[\sum_{l=1}^{r-1}\frac{r!}{l!(r-l)!}(max_{0\le i\le r-1}\|B(ik+s)\|)^l\right]\right)$
- $\Delta_3^s = \frac{\max_{1\le i,j\le T}||Q_s(j,i)||(1+(T-1)\max_{1\le i\le T-1}||X_s(i)||)}{1-(T-1)\max_{1\le i,j\le T}||Q_s(j,i)||\max_{1\le i\le T-1}||B(ik+s)||}\max_{1\le i\le T-1}||B(ik+s)||$
- $\Delta_1^{s,*} = \sqrt{||X_s(T)||^2 + \frac{\omega^* - \overline{\omega}_1(A,T)}{\omega^*\overline{\omega}_1(A,T)}} - ||X_s(T)||$

3.2. *k*. Mertebeden Periyodik Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Çözümü

k. mertebeden periyodik katsayılı (1) sisteminin $s=0,1,2,\dots,k-1$ için $X_s(n)=\prod_{i=0}^{n-1}A(ik+s)$ fundamental matrisini, fundamental matriste $n=T$ alınarak elde edilen çözümünün karakterini belirleyen $X_s(T)$ monodromi matrisini ve monodromi matrislerini eleman kabul eden

$$\mathcal{X}=\{X_s(T)|s=0,1,2,\dots,k-1\}$$

monodromi matris ailesini tanımlayalım. Aşağıdaki teorem (1) sisteminin çözümünü vermektedir.

Teorem 3.1. (1) sisteminin çözümü

$$X(n)=X_s(r)\big(X_s(T)\big)^u x_s \quad (3)$$

olacak şekilde $u\in\mathbb{Z}$, $r\in\{0,1,\dots,T-1\}$ ve $s\in\{0,1,\dots,k-1\}$ vardır.

İspat. (1) Cauchy probleminin çözümü,

$$x(n)=A(n-k)A(n-2k)\dots A(s+k)A(s)x_s$$

dir. $n=ukT+v$, $0\le v\le kT-1$, $0\le s\le k-1$ ve $u,s,v\in\mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$x(n)=\big[A(uTk+v-k)\dots A\big((uT+1)k+s\big)A(uTk+s)\big]$$

$$\Big[A\big((uT-1)k+s\big)\dots A\Big(\big((u-1)T+2\big)k+s\Big)A\Big(\big((u-1)T+1\big)k+s\Big)A\big((u-1)Tk+s\big)\Big]$$

...

$$\big[A\big((2T-1)k+s\big)\dots A\big((T+2)k+s\big)A\big((T+1)k+s\big)A(Tk+s)\big]$$

$$\big[A\big((T-1)k+s\big)\dots A(2k+s)A(k+s)A(s)\big]x_s$$

şeklinde yazılabilir. $v=kr+s$ olarak alınır ise (1) sisteminin çözümü

$$x(n)=\prod_{i=0}^{r-1}A(ik+s)\,\Big(\prod_{i=0}^{T-1}A(ik+s)\Big)^u x_s$$

veya

$$x(n)=X_s(r)\big(X_s(T)\big)^u x_s$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 3.1. $x(n+3)=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & \frac{(-1)^n}{4}\end{pmatrix}x(n)$, $x(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, x(1)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, x(2)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

3. Mertebeden periyodik katsayılı lineer denklem sistemini ele alalım. $k=3, T=2$ olduğundan

$$x(n)=A(n-3)A(n-6)\dots A(3+s)A(s)x_s,$$

$n=6u+v$, $v=3r+s$; $0\le v\le 5$, $0\le s\le 2$, ve $u,s,v,r\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x(n)=\prod_{i=0}^{r-1}A(3i+s)\,\Big(\prod_{i=0}^{1}A(3i+s)\Big)^u x_s$$

veya

$$x(n)=X_s(r)\big(X_s(2)\big)^u x_s$$

olarak elde edilir. Mesela

$$x(15)=X_0(1)\big(X_0(2)\big)^2 x_0;$$

$X_0(1)=A(0), X_0(2)=A(1)A(0)$ olduğundan

$x(15) = \begin{pmatrix} 0.03125 \\ 0 \end{pmatrix},$

$x(16) = X_1(1)\big(X_1(2)\big)^2 x_1;$

$X_1(1) = A(1), X_1(2) = A(0)A(1)$
olduğundan

$x(16) = \begin{pmatrix} 0.0585938 \\ -0.000976562 \end{pmatrix}$

dir.

3.3. *k*. Mertebeden Periyodik Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Schur Kararlılığı

Teorem 3.2. (1) sisteminin Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{X}$ matris ailesindeki her bir matrisin Schur kararlı olmasıdır.

İspat. Yeter şart: $\mathcal{X}$ matris ailesindeki her bir matrisin Schur kararlı olduğunu kabul edelim. $n \to \infty$ iken aynı zamanda $u \to \infty$ olduğundan

$lim_{n\to\infty}\|x(n)\| = lim_{n\to\infty}\left\|X_s(r)\big(X_s(T)\big)^u x_s\right\|$

$\leq \|X_s(r)\|\; lim_{u\to\infty}\left\|\big(X_s(T)\big)^u\right\|\; \|x_s\|$

eşitsizliği yazılabilir. Her $s = 0,1,2,\dots,k-1$ için $X_s(T)$ Schur kararlı olduğundan $lim_{u\to\infty}\left\|\big(X_s(T)\big)^u\right\| = 0$ ve elde edilen eşitsizlikten $lim_{n\to\infty}\|x(n)\| = 0$ olduğu görülür. Böylece (1) sisteminin Schur kararlı olduğu görülür.

Gerek şart: (1) sisteminin Schur kararlı olsun.

Lyapunov teoremine göre; (1) sisteminin Schur kararlı olması $s = 0,1,2,\dots,k-1$ için $X_s^*(T)F_sX_s(T) - F_s + I = 0$ Lyapunov fark matris denkleminin $F_s = F_s^* > 0$ çözümüne sahiptir. Bu ise her bir $X_s(T)$ matrisinin Schur kararlı olduğunu yani $\mathcal{X}$ matris ailesindeki her bir matrisin Schur kararlı olduğunu gösterir.

3.4. *k*. Mertebeden Periyodik Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Schur Kararlılık Parametresi

Şimdi, (1) sisteminin Schur kararlılığının kalitesini belirleyen yeni Schur kararlılık parametresini tanımlayalım.

Tanım 3.1. $s = 0,1,2,\dots,k-1$ için $X_s^*(T)F_sX_s(T) - F_s + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin çözümü $F_s = \sum_{k=0}^{\infty}(X_s^*(T))^k(X_s(T))^k, \quad F_s = F_s^* > 0$ olmak üzere; (1) sisteminin aşikar çözümünün Schur kararlılığının kalitesini gösteren kararlılık parametresi,

$\varpi_1(A,T) = max_{0\leq s\leq k-1}\|F_s\|$

şeklinde tanımlanır. Buna göre verilen sistem, $\varpi_1(A,T) < \infty$ ise Schur kararlı, aksi takdirde Schur kararlı değildir ve $\varpi_1(A,T) = \infty$ olarak gösterilir.

3.5. *k*. Mertebeden Periyodik Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Schur Kararlılığının Sürekliliği

Bu kısımda; Aydın vd. (2001); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016) da (2) Cauchy problemi için verilmiş olan süreklilik teoremleri yeni tanımlanan $\varpi_1(A,T)$ şart sayısına bağlı olarak (1) sistemi için revize edilecektir.

$B(n) = B(n+T)$, N boyutlu periyodik karesel matris olmak üzere

$y(n+k) = (A(n) + B(n))y(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$ (4)

sistemine, (1) periyodik katsayılı lineer fark denklem sisteminin bozunum sistemi denir. (4) sisteminin Schur kararlı olması

$$\mathcal{Y}=\{Y_s(T)|\mathrm{s}=0,1,2,\dots,\mathrm{k}-1\}$$

matris ailesindeki her bir matrisin Schur kararlı olmasına denktir. Burada $Y_s(T)=\prod_{i=0}^{T-1}[A(ik+s)+B(ik+s)]$ dır.

Aşağıda verilen teoremler, Schur kararlı olan (1) sisteminin hangi bozunumlar altında Schur kararlı kaldığını, başka bir deyişle hangi $B(n)$ bozunum matrisi için (4) sisteminin Schur kararlı kaldığını gösteren süreklilik teoremleridir.

Teorem 3.3. (1) sistemi Schur kararlı ($\overline{\omega}_1(A,T)<\infty$) olsun. Bu takdirde eğer, $B(n)$ matrisi için

$$\|\Delta^s\|<\Delta_1^s$$

eşitsizliği sağlanırsa (4) sistemi de Schur kararlıdır. Burada Δ^s ve Δ_1^s sembolleri kısım 3.1. de tanıtıldığı gibidir.

İspat. Teoremde verilen eşitsizlikten $\theta=1-(2\|X_s(T)\|\|Y_s(T)-X_s(T)\|+\|Y_s(T)-X_s(T)\|^2)\|F_s\|>0$ olarak alabiliriz.

(4) sisteminin fundamental matrisi $Y_s(n)$ ve w N boyutlu vektör olmak üzere

$$Y_s\big((p+1)T\big)=Y_s(T)Y_s(pT)$$

$$=\big[X_s(T)+\big(Y_s(T)-X_s(T)\big)\big]Y_s(pT),\ Y_s(pT)$$

$$=Y_s(T)^{p+1}\ (p\geq 0)$$

olarak ifade edilebilir. Buradan

$$\langle F_sY_s\big((p+1)T\big)w,Y_s\big((p+1)T\big)w\rangle=$$

$$=\langle F_sY_s(pT)w,Y_s(pT)w\rangle-\langle Y_s(pT)w,Y_s(pT)w\rangle$$

$$+\langle\big[X_s^*(T)F_s\big(Y_s(T)-X_s(T)\big)$$

$$+\big(Y_s(T)-X_s(T)\big)^*F_sX(T)$$

$$+\big(Y_s(T)-X_s(T)\big)^*F_s\big(Y_s(T)-X_s(T)\big)\big]Y_s(pT)w,Y_s(pT)w\rangle$$

yazılır. Böylece

$$\langle F_sY_s\big((p+1)T\big)w,Y_s\big((p+1)T\big)w\rangle\leq\Big(1-\frac{1-\big(2\|X_s(T)\|\|Y_s(T)-X_s(T)\|+\|Y_s(T)-X_s(T)\|^2\big)\|F_s\|}{\|F_s\|}\Big)$$

$$\times\langle F_sY_s(pT)w,Y_s(pT)w\rangle$$

(5)

eşitsizliği elde edilir. (5) eşitsizliğinin sağ tarafı p için arka arkaya uygulandığında

$$\langle F_sY_s(pT)w,Y_s(pT)w\rangle\leq\Big(1-\frac{\theta}{\|F_s\|}\Big)^p\langle F_sw,w\rangle$$

eşitsizliğine ulaşılır. F_s pozitif tanımlı matris olduğundan

$$p\to\infty \text{ için } \|Y_s(pT)w\|=\big\|\big(Y_s(T)\big)^pw\big\|\to 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise (4) sisteminin $Y_s(T)$ monodromi matrisinin bütün öz değerlerinin birim diskin içine düşmesini, yani $\big|\lambda_i\big(Y_s(T)\big)\big|<1,\ (i=1,2,\dots,N)$ olmasını gerektirir. Böylece $Y_s(T)$ monodromi matrisi, dolayısıyla (4) bozunuma uğramış periyodik katsayılı sistemi Schur kararlıdır.

Teorem 3.4. $\mathrm{s}=0,1,2,\dots,\mathrm{k}-1$ için $X_s(T)$ ve $Y_s(T)$ sırasıyla, (1) ve (4) sistemlerinin monodromi matrisleri olsun. Bu takdirde,

$$\big\|\Delta^s\big\|<\Delta_2^s$$

eşitsizliği sağlanır. Burada Δ^s ve Δ_2^s sembolleri kısım 3.1. de tanıtıldığı gibidir.

Ayrıca, eğer (1) sistemi Schur kararlı ise bu takdirde $\Delta_2^s < \Delta_1^s$ ifadesini sağlayan $B(n)$ matrisi için (4) sistemi de Schur kararlıdır.

Teorem 3.5. $s=0,1,2,\dots,k-1$ için $X_s(T)$ ve $Y_s(T)$ sırasıyla, (1) ve (4) sistemlerinin monodromi matrisleri ve

$(T-1)\max_{1\le i,j\le n}||Q_s(j,i)||\max_{1\le i\le n-1}\left\|B(ik+s)\right\|<1$

olmak üzere

$$\left\|\Delta^s\right\| < \Delta_3^s$$

eşitsizliği doğrudur. Burada Δ^s ve Δ_3^s sembolleri kısım 3.1. de tanıtıldığı gibidir Ayrıca, eğer (1) sistemi Schur kararlı ise bu takdirde

$$\left\|B(n)\right\| < \frac{\Delta_1}{\max_{1\le i,j\le T}\left\|Q_s(j,i)\right\|\left[(1+(T-1)(\max_{1\le i\le T-1}\left\|X_s(i)\right\|+\Delta_1)\right]} \quad (6)$$

ifadesini sağlayan $B(n)$ matrisi için (4) sistemi de Schur kararlıdır.

Teorem 3.6. (1) sistemi Schur kararlı ($\bar{\omega}_1(A,T)<\infty$) olsun. Bu takdirde (6) şartını sağlayan $B(n)$ matrisi için,

$$\bar{\omega}_1(A+B,T) \le \frac{\bar{\omega}_1(A,T)}{1-(2\left\|X_s(T)\right\|+\Delta_3^s)\Delta_3^s\bar{\omega}_1(A,T)},$$

$$\left\|\tilde{F}_s-F_s\right\| \le \frac{(2\left\|X_s(T)\right\|+\Delta_3^s)\Delta_3^s\bar{\omega}_1(A,T)^2}{1-(2\left\|X_s(T)\right\|+\Delta_3^s)\Delta_3^s\bar{\omega}_1(A,T)}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Teorem 3.7. (1) sistemi ω*–Schur kararlı bir sistem ($\bar{\omega}_1(A,T)\le$ ω*) olsun. Eğer,

i) $\Delta_2^s \le \Delta_1^{s,*}$,

ii) $\left\|B(n)\right\| \le \frac{\Delta_1^{s,*}}{\max_{1\le j,r\le T}\left\|Q_s(j,r)\right\|\left[(1+(T-1)(\max_{1\le i\le T-1}\left\|X_s(r)\right\|+\Delta_1^{s,*})\right]}$

şartları sağlanırsa, bu durumda $B(n)$ matrisi için (4) sistemi de ω*–Schur kararlıdır.

Not 3.1. Teorem 3.3., Aydın vd. (2001)' de yer alan Teorem 2' nin genişletilmesidir ve ispatı Aydın vd (2001)' deki ispat yöntemi adım adım izlenerek yapılmıştır. Ayrıca; Teorem 3.4. ve 3.5., sırasıyla Duman ve Aydın (2011)' deki Teorem 3 ve 4' ün; Teorem 3.6., ve 3.7., Duman vd. (2016)' daki Teorem 6 ve 8' in genişletilmesidir. Dolayısıyla tekrara düşmemek açısından Teorem 3.4-3.7 in ispatlarına yer verilmemiştir.

Not 3.2. (1) sisteminde $k=1$ olması durumunda Teorem 3.3.–3.7., Aydın vd. (2001); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016) bulunan (2) sistemi için yazılan ilgili Teoremlere dönüşmektedir. Ayrıca $k=1$ ve $T=1$ olması durumunda $\bar{\omega}_1(A,T)=\omega_1(A,T)=\omega(A)$ yani bu durumda (1) sistemi 1. mertebeden sabit katsayılı sistem ve Teorem 3.3.–3.7. 1. mertebeden sabit katsayılı sistem için yazılan sonuçlar ile örtüşmektedir. Bu ise Teorem 3.3.–3.7. in literatür bilgisi ile olan uyumunu göstermektedir.

Not 3.3. Çalışmamızdaki hesaplamalar MVC (Bulgak ve Eminov (2001)) kullanılarak yapılmıştır.

4. Nümerik Örnekler

Örnek 4.1. $x(n+3)=\begin{pmatrix}0.99 & 0\\ 0 & \frac{(-1)^n}{2}\end{pmatrix}x(n)$ periyodik katsayılı lineer denklem sistemini ele alalım. Sistemin şart sayısı $\bar{\omega}_1(A,2)=25.3781$ olup sistem Schur kararlıdır. Verilen sistem

$||B(n)|| < 0.00990099$ **(Teorem 3.5.)**

kadar bir bozunum uğrar ise verilen sistemin Schur kararlı kalacağını Teorem 3.5 garanti etmektedir.

Sırasıyla;

- $B_1(n) = \begin{pmatrix} 0.0099 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.0099 \end{pmatrix}$, $\max_{0\le i\le 1} ||B_1(i)|| = 0.0099$,
- $B_2(n) = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.01 \end{pmatrix}$, $\max_{0\le i\le 1} ||B_2(i)|| = 0.01$,
- $B_3(n) = \begin{pmatrix} 0.011 & 0 \\ 0 & (-1)^n 0.011 \end{pmatrix}$, $\max_{0\le i\le 1} ||1B_3(i)|| = 0.011$

bozunum matrislerini dikkate alalım. Teorem 3.5., verilen sistem B_1 ile bozunuma uğratıldığında bozunum sistemin Schur kararlı kaldığını garanti etmekte fakat B_2 ve B_3 bozunuma uğratıldığında Schur kararlı kaldığını garanti etmemektedir. Gerçekten bozunum sisteminin kararlılık parametreleri sırasıyla $\overline{\omega}_1(A+B_1,2)=2500.38$, $\overline{\omega}_1(A+B_2,2)=\infty$ ve $\overline{\omega}_1(A+B_3,2)=\infty$ olup B_1 ile bozunuma uğratılan sistem Schur kararlı iken B_2 ve B_3 bozunum matrisleri ile bozunuma uğratılan sistemler Schur kararlı değildirler. Böylece, Teorem 3.5'ün keskin sınırlar verdiği görülmüş olur.

Örnek 4.2. Periyodik katsayılı

$$x(n+3)=\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}n) & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1}\cos(\frac{\pi}{2}n) \end{pmatrix} x(n)$$

lineer denklem sistemini ele alalım.

$B(n)=\begin{pmatrix} 0.01 & \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{5} \\ \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{5} & 0.01 \end{pmatrix}$ bozunum matrisi ile verilen sistemi bozunuma uğratalım ve $\|Y_s(T)-X_s(T)\|$ nin üst sınırlarını aşağıdaki tabloda karşılaştıralım.

s	$\|\Delta^s\|$	Δ_1^s	Δ_2^s	Δ_3^s
0	0.0470458	0.933593	1.12949	2.52659
1	0.0470458	0.933593	0.787105	1.09469
2	0.0470477	0.933593	1.12949	2.52659

Tablo 4.1. Verilen Schur kararlı sistemin özelliği bozulmaksızın B bozunum matrisine karşılık $\|\Delta^s\|=\|Y_s(T)-X_s(T)\|$ değerini ve Δ_i^s $(i=1,2,3)$ üst sınırlarını gösteren tablo

Tablo 4.1. den görüldüğü gibi Δ_1^s üst sınırı sabit, Δ_2^sve Δ_3^s üst sınırları ise bozunuma bağlı olarak değişmektedir. Dolayısıyla $\|\Delta^s\|$ değişimi hakkında Δ_2^sve Δ_3^s üst sınırları daha sağlıklı bilgiler vermektedir.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada; k. mertebeden periyodik katsayılı (1) problemi ele alınmıştır. (1) problemi için incelen özellikler aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- Fundamental matris ve monodromi matrisi tanımlanmıştır.
- Problemin çözümü elde edilmiştir.
- Schur kararlılığı için gerekli ve yeterli bir kriter verilmiştir.
- $\overline{\omega}_1(A,T)$ Schur kararlılık parametresi tanıtılmıştır.
- Problemin Schur kararlı olması durumunda hangi bozunumlar altında sistemin Schur kararlı kaldığını gösteren süreklilik teoremleri verilmiştir (Teorem 3.3- 3.7).

Burada verilen süreklilik teoremleri, (1) problemi için yeni tanımlanan Schur kararlılık parametresine bağlı olarak, (2) ile verilen birinci mertebeden periyodik katsayılı Cauchy problemi için Aydın vd. (2001); Duman ve Aydın (2011); Duman vd. (2016) çalışmalarında verilen süreklilik teoremlerinin yeniden revize edilmesi ile elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar nümerik örnekler ile desteklenmiştir. Örneklerde, süreklilik teoremlerinin keskin sınırlar verdiği görülmektedir.

6. Kaynaklar

Akın, Ö. ve Bulgak, H. (1998), “Lineer fark denklemleri ve kararlılık teorisi”, *Selçuk Üniversitesi Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi Yayınları*, Konya.

Aydın, K., Bulgak, H. and Demidenko, G. V. 2000, “Numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients”, *Siberian Mathematical Journal,* 41, 1005-1014.

Aydın, K., Bulgak, H. and Demidenko, G. V. 2001, “Continuity of numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients”, *Selçuk Journal Applied Mathematics*, 2 , 5-10.

Bulgak, H. 1999, “Spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability” *Nato Science Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences*, 536, 95-124.

Bulgak, H. and Eminov, D. 2001, “Computer dialogue system MVC”, *Selcuk Journal Applied Mathematics,* 2, 17-38.

Duman, A. and Aydın, K. 2011, “Sensitivity of Schur stability of monodromy matrix”, *Applied Mathematics and Computation,* 217, 6663–6670.

Duman, A. , Çelik Kızılkan, G., Aydın, K. 2016, “Sensitivity of Schur stability of systems of linear difference equations with periodic coefficients”, *New Trends in Mathematical Sciences,* 4 (2) , 159-173.

Wilkinson, J. H.(1965), “The algebraic eigenvalue problem”, *Clarendom Press,* Oxford.